

Devoir sur Table 5

Durée : 4h

1. Les exercices sont indépendants. Ils peuvent être traités dans un ordre quelconque.
2. Tous les documents sur papier sont interdits.
3. Les calculatrices ne sont pas autorisées.
4. Le matériel de géométrie (règle, compas, équerre) est autorisé.
5. La notation des copies tiendra compte dans une large mesure de la qualité de la rédaction. Ceci implique que vous devez faire des raisonnements clairs, concis et complets, utiliser un langage mathématiques adapté et précis, être lisible et éviter les fautes d'orthographe et de grammaire.
6. Si, au cours du devoir, vous repérez ce qui vous semble être une erreur d'énoncé, vous le signalez sur votre copie et poursuivez sa composition en expliquant les raisons des initiatives que vous avez été amené à prendre.
7. Mettez en évidence vos résultats en les encadrant ou les soulignant.
8. Conformément au règlement de la Banque PT
 - Composer lisiblement sur les copies avec un stylo à bille à encre foncée : bleue ou noire.
 - L'usage de stylo à friction, stylo plume, stylo feutre, liquide de correction et dérouleur de ruban correcteur est interdit.

Exercice 1*(Banque PT, Maths A, 2017)*

On rappelle qu'une variable aléatoire X suit une loi géométrique de paramètre $p \in]0, 1[$ si $X(\Omega) \subset \mathbb{N}^*$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbb{P}(X = n) = p(1-p)^{n-1}.$$

1. Soit X une variable aléatoire de loi géométrique de paramètre p .
 - (a) Calculer pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(X > n)$.
 - (b) Soit $(X_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi de Bernoulli de paramètre p . On note T le rang du premier succès obtenu : $T = \inf \{k \geq 1, X_k = 1\}$. Montrer que T a même loi que X .
2. Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes de même loi géométrique de paramètre p .
 - (a) Calculer la fonction génératrice de X puis de $X + Y$.
 - (b) En déduire que pour tout $n \geq 2$, $\mathbb{P}(X + Y = n) = p^2(n-1)(1-p)^{n-2}$.
 - (c) Déterminer, pour $n \geq 2$, la loi de X sachant $X + Y = n$.
3. On considère toujours X et Y deux variables aléatoires indépendantes de même loi géométrique de paramètre p . On pose $T = \max(X, Y)$ et $Z = \min(X, Y)$. On pose $q = 1 - p$.
 - (a) Exprimer $X + Y$ et $|X - Y|$ en fonction de Z et T .
 - (b) Montrer que $\mathbb{P}(X = Y) = \frac{p}{1+q}$.
 - (c) Montrer que Z suit une loi géométrique de paramètre $1 - q^2$.
On pourra caractériser la loi de Z par sa fonction de répartition.
 - (d) Déterminer la loi de T .

Exercice 2*(Banque PT, Maths B, 2015)***1. Question préliminaire.**

Soit E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension finie d , et f un endomorphisme de E .

$\text{Ker}(f)$ désigne le noyau de f , et $\text{Im}(f)$ son image. On note $f^2 = f \circ f$. Enfin, Id_E est l'endomorphisme identité de E . λ désigne un réel.

(a) Démontrer que :

$$\text{Ker}(f - \lambda \text{Id}_E) \subset \text{Ker}(f^2 - \lambda^2 \text{Id}_E)$$

Quel lien peut-on en déduire entre les valeurs propres de f et celles de f^2 ?

(b) Démontrer que si $\text{Ker}(f) \cap \text{Im}(f) \neq \{0_E\}$, alors

$$\dim(\text{Ker}(f^2)) \geq \dim(\text{Ker}(f)) + 1.$$

(c) On désigne par P_f et P_{f^2} les polynômes caractéristiques respectifs de f et f^2 .

Démontrer que $P_{f^2}(X^2) = (-1)^d P_f(X) P_f(-X)$.

2. Dans cette question, n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 3, E est l'espace vectoriel $\mathbb{R}_n[X]$ des polynômes à coefficients réels de degré au plus n .

Soit f l'application définie, pour tout polynôme P de E , par :

$$f(P) = (X^2 - X + 1)P(-1) + (X^3 - X)P(0) + (X^3 + X^2 + 1)P(1)$$

(a) Démontrer que f est un endomorphisme de E .

(b) Déterminer $\text{Ker}(f)$ et $\text{Im}(f)$. Préciser leur dimension.

(c) f est-il injectif? Surjectif?

(d) Justifier que 0 est valeur propre de f . Que peut-on dire de sa multiplicité?

(e) Démontrer que les polynômes $Q_1 = 3X^3 + 4X^2 - 3X + 4$ et $Q_2 = X^3 + X$ sont des vecteurs propres de f . Quelles sont les valeurs propres associées?

(f) A-t-on $\text{Ker}(f) \oplus \text{Im}(f) = E$?

(g) Quelles sont les valeurs propres de f^2 ? En déduire que f^2 est diagonalisable.

(h) f est-il trigonalisable? Diagonalisable? Préciser les valeurs propres et les sous-espaces propres de f .

Problème*(CCINP PSI, 2021)*

Dans tout le problème, α désigne un nombre réel.

On note $\mathcal{D}_\alpha$ l'ensemble des réels x pour lesquels la série entière $\sum_{n \geq 1} \frac{x^n}{n^\alpha}$ est convergente et on pose, pour tout $x \in \mathcal{D}_\alpha$:

$$f_\alpha(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n^\alpha}$$

Objectifs

Ce problème est composé de deux parties indépendantes.

Dans la **Partie I**, on étudie quelques propriétés élémentaires des fonctions f_α .

L'objectif de la **Partie II** est de construire un logarithme complexe.

Partie I — Quelques propriétés des fonctions f_α

1. Déterminer le rayon de convergence R commun aux séries entières définissant les fonctions f_α .
2. Déterminer, suivant les valeurs du réel α , le domaine de définition $\mathcal{D}_\alpha$ de la fonction f_α .
On distinguera les cas $\alpha \in]-\infty, 0]$, $\alpha \in]0, 1]$ et $\alpha \in]1, +\infty[$.
3. On suppose dans cette question que $\alpha > 0$. Déterminer, pour tout $x \in \mathcal{D}_\alpha$, le signe de $f_\alpha(x)$.
4. Expliciter f_0 , f_{-1} et f_1 .
5. Soit $\alpha > 1$. Prouver que f_α est continue sur $\mathcal{D}_\alpha$.
6. Soit $\alpha \leq 1$. Prouver que $\lim_{x \rightarrow 1^-} f_\alpha(x) = +\infty$. On pourra comparer f_α à f_1 .

On suppose dans les deux prochaines questions qu'il existe un réel $\lambda \geq 0$ et une variable aléatoire X_α , définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ et à valeurs dans $\mathbb{N}^*$, tels que la fonction génératrice G_α de X_α soit :

$$G_\alpha = \lambda f_\alpha.$$

7. Montrer que $\alpha > 1$ et $\lambda = \frac{1}{f_\alpha(1)}$.
8. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que la variable aléatoire X_α admette une espérance. Déterminer cette espérance en fonction de $f_\alpha(1)$ et $f_{\alpha-1}(1)$ seulement.

Partie II — Un logarithme complexe

1. Donner sans démonstration le développement en série entière au voisinage de 0 de la fonction qui, à $x \in]-1, 1[$, associe $\ln(1+x)$.

Pour tout nombre complexe z , tel que la série $\sum_{n \geq 1} \frac{(-z)^n}{n}$ est convergente, on note : $S(z) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-z)^n}{n}$.

2. Donner le rayon de convergence R de la série entière définissant S .
Pour tout x réel élément de $] -R, R[$, déterminer la valeur de $\exp(S(x))$.

Soit $z_0 \in \mathbb{C}$ tel que $|z_0| < R$. On considère la série entière de la variable **réelle** t suivante :

$$\sum_{n \geq 1} (-1)^{n-1} \frac{z_0^n}{n} t^n.$$

En cas de convergence, on note $g(t)$ sa somme.

On a donc, pour $t \in \mathbb{R}$ tel que la série est convergente, $g(t) = S(tz_0)$.

3. Déterminer le rayon de convergence de la série entière définissant g .
4. Prouver que g est définie et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[0, 1]$. Déterminer, pour tout $t \in [0, 1]$, $g'(t)$.
5. On pose $h = \exp \circ g$. Prouver que pour tout $t \in [0, 1]$:

$$h'(t) = \frac{z_0}{1 + tz_0} h(t).$$

6. Résoudre l'équation différentielle de la question précédente et en déduire que :

$$\exp(S(z_0)) = z_0 + 1.$$